Wirkungsquerschnitte von Atomen gegenüber langsamen und schnellen Elektronen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der philosophischen Fakultät

der Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Berlin

Von

Reuben Louis Rosenberg

aus Johannesburg, Südafrika

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Juli 1932

Tag der Promotion: 1. März 1933

Johann Ambrosius Barth in Leipzig

164

Referenten:

Dr. F. Möglich

Prof. Dr. M. von Laue

Prof. Dr. E. Schrödinger

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Annalen der Physik“
5. Folge, Band 15, Heft 7. 1932

Printed in Germany

DRUCK VON METZGER & WITTIG IN LEIPZIG 278

Es wird die Kraft, die eine ebene Materiewelle auf einen kugelsymmetrischen Potentialbereich ausübt, berechnet. Dies wird angewendet für die Streuung von Elektronen an Atomen, um einen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt in der Form einer Reihe der Koeffizienten α_n zu erhalten. Als spezielles Beispiel wird das allgemeine Ergebnis für das Atommodell von Allis und Morse berechnet und die Resultate für verschiedene Werte des Parameters b^2 graphisch dargestellt. Die Anomalien des Ramsaueffektes werden diskutiert und die Lagen der Maxima näherungsweise berechnet. Zum Schluß wird der Grenzübergang mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen der auftretenden Funktionen für große Geschwindigkeiten gemacht; und ein Wert des Wirkungsquerschnittes in erster Näherung berechnet.

I. Wirkungsquerschnitt und Kraftdichte

Die Methoden, die bisher von verschiedenen Autoren[1]) benutzt worden sind, um die Streuung von Elektronen an Atomen zu berechnen, stützen sich alle auf die Analogie zwischen der Wellenmechanik und der Wellentheorie des Lichtes. Die Wellenfunktion des gestreuten Teilchens wird berechnet und die Amplitude der gestreuten Kugelwelle wird benutzt zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten oder Wirkungsquerschnittes. Der Stoßvorgang wird im ganzen als Beugungserscheinung aufgefaßt und verliert den Charakter eines dynamischen Vorganges oder eines Stoßes, wie er uns in der klassischen Mechanik bekannt ist. Die Ursache liegt darin, daß der Begriff der Kraft überhaupt in der Wellenmechanik nicht erörtert worden ist.

In der gewöhnlichen klassischen Mechanik wird als fundamentale Tatsache für die Behandlung eines Stoßproblems der

---

1) M. Born, Ztschr. f. Phys. **37**. S. 863. 1926; **38**. S. 803. 1926; H. Faxen u. J. Holtzmark, Ztschr. f. Phys. **45**. S. 307. 1928; J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **32**. S. 361. 1928; W. P. Allis u. P. M. Morse, Ztschr. f. Phys. **70**. S. 567. 1931.

Satz von der Erhaltung des Impulses verwendet. Wir können klassisch einen Zusammenstoß eines Teilchens mit einem Körper dadurch beschreiben, daß wir sagen, das Teilchen, das sich in einem gewissen Medium bewegt, trifft auf die Trennungsoberfläche eines anderen Mediums auf. Bei dem Zusammenstoß wird ein Impuls zwischen Teilchen und Körper ausgewechselt. Dieser Wechsel des Impulses wird durch den Impulssatz bestimmt. Das Teilchen überträgt einen gewissen Impuls auf den Körper. Wir sagen, daß ein Druck auf den Körper ausgeübt wird. Ganz analog der klassischen Behandlung wollen wir den Zusammenstoß eines Elektrons mit einem Atom wellenmechanisch behandeln. Zwei Medien im wellenmechanischen Felde unterscheiden sich durch ihre Potentialfunktionen. Das Auffallen eines Elektrons auf ein Atom wird beschrieben durch das Auffallen einer Materiewelle auf einen Potentialbereich. Der Vorgang des Stoßes wird durch das Verhalten der Wellenfunktion in den verschiedenen Medien beschrieben. Verbunden mit einer Materiewelle ist eine gewisse Impulsdichte, die eine Funktion der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung ist. Die Wellenfunktion ist in den verschiedenen Medien im allgemeinen verschieden, so daß der zugehörige Impuls auch verschieden ist. Eine Übertragung eines gewissen Impulses auf das Atom findet deshalb statt. Diese Übertragung, die im klassischen Fall durch den Impulssatz bestimmt wird, wird hier durch die Stetigkeitsforderung der Wellenfunktion und ihrer Ableitung an der Trennungsfläche bestimmt. Da wir es hier mit einer Impulsdichte zu tun haben, so müssen wir nach der Übertragung des Impulses pro Volumeneinheit pro Zeiteinheit fragen. Diese wollen wir mit Kraftdichte bezeichnen und die Kraftdichte mal dem Gesamtvolumen des Bereiches mit Druck.

Die Ersetzung des korpuskularen Vorganges durch einen Wellenvorgang gibt Anlaß, den Begriff des wellenmechanischen Feldes zu bilden. Es liegt nahe, den Vorgang der Absorption mittels einer Feldtheorie zu beschreiben. Wie in der Feldtheorie der Elektrizität der Maxwellsche Spannungstensor den Zustand des elektrischen Feldes beschreibt, so beschreibt in der Wellenmechanik der Energieimpulstensor der Materie den Zustand des Materiefeldes. Die Atome oder Potentialbereiche, die sich im Materiefelde befinden, dürfen wir dann als Senken der Materie betrachten, woraus der Begriff der Absorption unmittelbar folgt. Die Ergiebigkeit des Feldes ist dann ein Maß der Absorption. Daß diese Darstellung zu demselben Resultat führen wird wie die aus der klassischen Mechanik

durch Einführung der Kraft gewonnene liegt darin, daß die Kraft und die Ergiebigkeit des Feldes beide aus dem Energieimpulstensor gebildet werden können. Zuerst wollen wir die Ausdrücke für die „Kraft“ und die „Ergiebigkeit einer Senke“ berechnen und dann übergehen zum Begriff des Absorptionskoeffizienten.

Die Komponenten des Stromes lauten bekanntlich:

$$S_k = \frac{h}{4\pi i m}\left\{\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k}\right\}.$$

Hieraus bilden wir den nichtrelativistischen Energieimpulstensor.[1])

$$(1)\quad \begin{cases} (j,k = 1, 2, 3)\ T_{jk} = \\ \dfrac{h^2}{16\pi^2 m}\left\{\dfrac{\partial \psi^*}{\partial x_k}\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \psi^*}{\partial x_j}\dfrac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^* \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k} - \psi \dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_j \partial x_k}\right\}. \end{cases}$$

Die Kraftdichte im wellenmechanischen Felde erhalten wir jetzt durch die negative Divergenz dieses Tensors:

$$(2)\qquad F_j = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}.$$

Um die Gesamtkraft, die auf einen Körper im Felde wirkt, zu erhalten, integrieren wir jetzt über den ganzen Körper:

$$(2a)\qquad K_j = -\int \sum \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}\, d\tau$$

oder vektoriell:

$$K = -\int \operatorname{div} T\, d\tau.$$

Dies Integral formen wir mit Hilfe des Gaussschen Satzes um. Es folgt:

$$(3)\qquad K = -\int T \cdot \mathfrak{n}\, df,$$

wo über eine Oberfläche, die den ganzen Raum umschließt, integriert wird, und $\mathfrak{n}$ die nach außen gerichtete Normale der Oberfläche von der Länge 1 ist. Es ist dann:

$$K_z = -\int (T_z \cdot \mathfrak{n})\, df$$

$$= -\int \sum_k T_{zk} \cos(\mathfrak{n}\, k)\, df \quad k = x, y, z.$$

---

1) Dieser Tensor ist der „räumliche“ Anteil des von E. Schrödinger (Ann. d. Phys. [4] 82. S. 265—272. 1927) hergeleiteten Materietensors, spezialisiert durch die Annahme eines verschwindenden Vektorpotentials.

Nun ist nach (1):

$$T_{zx} = \frac{h^2}{16\pi^2 m}\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi^*}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x\,\partial z}\right\}$$

und zwei ähnliche Ausdrücke für T_{zy}, T_{zz}. Man erhält dann für

$$\begin{aligned}\sum_k T_{zk}\cos(nk) &= \frac{\partial\psi^*}{\partial z}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(nz)\right\}\\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial z}\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\cos(nx) + \cdots + \cdots\right\}\\ &- \psi^*\left\{\cos(nx)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial z}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial z}\\ &- \psi\left\{\cos(nx)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(nz)\frac{\partial}{\partial z}\right\}\frac{\partial\psi^*}{\partial z}\\ &= \frac{\partial\psi^*}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial n} - \psi^*\frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial z},\end{aligned}$$

wo $\partial\psi/\partial n$ die Ableitung nach der Normalen bedeutet. Ähnliche Ausdrücke folgen ohne weiteres für die anderen Komponenten. Allgemein können wir jetzt den Ausdruck für den Druck der Materiewelle auf einen Körper formulieren.

Es sei F eine Fläche, die den Körper umschließt und n die nach außen gerichtete Normale dieser Fläche. Definieren wir den Vektor:

$$(4)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial\psi^*}{\partial n}\cdot\operatorname{grad}\psi + \dfrac{\partial\psi}{\partial n}\operatorname{grad}\cdot\psi^* \\ \qquad\qquad - \psi^*\dfrac{\partial}{\partial n}\cdot\operatorname{grad}\psi - \psi\dfrac{\partial}{\partial n}\operatorname{grad}\psi^*, \end{cases}$$

dann ist die Gesamtkraft, die auf einen Körper ausgeübt wird, nach (3):

$$(5)\qquad K = -\frac{h^2}{16\pi^2 m}\int P\,df,$$

wo über die Fläche F integriert wird.

Wir nehmen an, das Atom sei abgegrenzt und kugelförmig; es bilde ein wellenmechanisches Medium dadurch, daß ein gewisses Potential im Innern herrscht. Außerhalb des Atoms haben wir einen feldfreien Raum. Wir nehmen den Mittelpunkt des Atoms als Koordinatenursprung und betrachten als einfallende Welle eine solche, die einem aus der negativen z-Richtung kommenden Elektron zugeordnet ist. Weiter nehmen wir an, das Atom sei kugelsymmetrisch, d. h. das Potential sei eine Funktion von r allein. Der zur einfallenden Welle zugehörige Impulstensor wird dann nur eine Komponente in der

z-Richtung haben. Die Streuung des Stromes wird wegen der Kugelsymmetrie symmetrisch um die Polarachse, hier die z-Achse, sein, so daß der Druck auch nur eine resultierende Komponente in der z-Richtung haben wird. Wir brauchen deshalb nur den Wert von K_z zu berechnen. Es wird nützlich sein, diese Komponente in Polarkoordinaten aufzustellen. Es ist:

$$P_z = P_r \cos\vartheta - P_\vartheta \sin\vartheta$$

und

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad \operatorname{grad}_r \psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad \operatorname{grad}_\vartheta \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}.$$

So folgt nach (5)

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} K_z = -\frac{h^2}{16\pi^2 m}\int\Big[\Big\{2\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial r} - \psi^*\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial r^2}\Big\}\cos\vartheta \\ - \Big\{\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \psi^*\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\Big) \\ - \psi\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial\vartheta}\Big)\Big\}\sin\vartheta\Big]\,df. \end{aligned}\right.$$

Wir wollen jetzt versuchen, von diesem Begriff der von einem Teilchen am Atom ausgeübten Kraft zur Berechnung der Streuung überzugehen. Experimentell wird die Streuung bestimmt durch die Berechnung des Wirkungsquerschnittes des Atoms. Wir denken uns den Wirkungsquerschnitt als eine gewisse Fläche, die das Atom senkrecht zum Elektronenstrom bei einer rein geometrischen, die Ablenkung vernachlässigenden Betrachtung bildet, so daß alle Elektronen, die gegen diese Fläche stoßen, aus dem einfallenden Strahl gestreut werden.

Betrachten wir eine Ebene vom Flächeninhalt Q, die senkrecht zur z-Richtung steht. Eine ebene Materiewelle $\psi = e^{ikz}$ trifft auf diese Fläche auf. Wir nehmen an, daß die Fläche vollkommen absorbiert und fragen jetzt nach der Kraft, die diese Welle auf die Fläche ausübt. Hat k die Bedeutung $k^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}$, dann ist die Impulsdichte, die mit einer ebenen Welle verbunden ist, bekanntlich $\frac{hk}{2\pi}$. Der Impuls, der pro Zeiteinheit auf die Fläche (pro Flächeneinheit) wirkt, ist dann $\frac{hk}{2\pi}v$, wobei v die Geschwindigkeit ist, mit welcher die Impulsdichte übertragen wird. Diese Geschwindigkeit ist bekanntlich die Gruppengeschwindigkeit des Wellenvorganges. Sie ist gleich der Teilchengeschwindigkeit. Aber diese Impulsübertragung ist die vom Teilchen ausgeübte Kraft pro Flächeneinheit. Die Ge-

samtkraft ist dann $\frac{h k}{2\pi} v \cdot Q$. Wenn nun Q der Wirkungsquerschnitt des Atoms sein soll, dann muß

$$\frac{h k}{2\pi} v \cdot Q = K_z \tag{7}$$

sein; d. h.

$$Q = \frac{2\pi K_z}{h k v}.$$

Es ist

$$k^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot \frac{1}{2} m v^2,$$

d. h.

$$v = \frac{h k}{2\pi m}$$

und

$$Q = \frac{4\pi^2 m}{h^2 k^2} K_z. \tag{8}$$

II. Der mathematische Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt

Wir haben jetzt die Wellenfunktion ψ zu bestimmen und das Integral für K_z auszuführen.

Bezeichnen wir mit E die Energie des Elektrons und $k^2 = \frac{8\pi^2 m E}{h^2}$, dann muß ψ eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \psi + \left(k^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V\right) \psi = 0 \tag{9}$$

sein, worin V das Potential ist. Wir haben aber angenommen, daß der Raum außerhalb des Atoms feldfrei ist, so daß dort $V = 0$ zu setzen ist. Eine Lösung[1]) ist daher:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi &= \sum_{m\,n} A_n \cos m\varphi\, P_n^m (\cos\vartheta) \frac{1}{\sqrt{k r}} J_{n+\frac{1}{2}} (k r) \\ &+ \sum_{m\,n} B_n \cos m\varphi\, P_n^m (\cos\vartheta) \frac{1}{\sqrt{k r}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}} (k r), \end{aligned} \right. \tag{10}$$

wo J und H die Besselsche bzw. die zweite Hankelsche Funktion ist.

Wir haben angenommen, daß die einfallende Welle so beschaffen ist, daß sie der Bewegung des Elektrons längs der z-Achse zugeordnet ist. Wir versuchen deshalb, die Welle in

---

1) E. T. Whittaker u. G. N. Watson, Modern Analysis, S. 398. Für die mathematischen Sätze über die Zylinderfunktionen, vgl. G. N. Watson, Theory of Besselfunctions, Kap. III.

die oben angegebene Form zu bringen. Für ein Teilchen, das sich auf einer Geraden bewegt, ist die ψ-Funktion

$$\psi_e = e^{ikz}.$$

Nun ist

$$z = r\cos\vartheta, \quad \text{d. h.} \quad \psi_e = e^{ikr\cos\vartheta}.$$

Es gilt aber[1]):

$$(11) \quad e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n(\cos\vartheta) \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

und das ist dasselbe wie die allgemeine Lösung (10), wenn wir $m = 0$ und $A_n = i^n(2n+1)$ setzen; d. h. der erste Teil unserer allgemeinen Lösung stellt die einfallende Welle dar. Den zweiten Teil identifizieren wir mit der an der Oberfläche reflektierten Welle, weil der asymptotische Verlauf von $H^{2)}_{n+\frac{1}{2}}$ wie $\frac{1}{r} e^{-ikr}$ ist.

Die vollständige Lösung für das Gebiet außerhalb des Atoms ist dann nach (10) und (11)

$$\psi_a = \psi_e + \psi_r.$$

Die Wellenfunktion für das Innere des Atoms setzen wir an als

$$(12) \quad \psi_i = \sum_n C_n P_n(\cos\vartheta) \chi_n(k_1 r),$$

wo $\chi_n(k_1 r)$ eine Lösung des radialen Bestandteils der Wellengleichung ist, d, h.

$$(13) \quad \frac{d^2\chi_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi_n}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\chi_n = 0,$$

k_1 mag von k verschieden sein; es wird durch die Energie, also durch k bestimmt.

Der Radius des Atoms sei r_0. Am Rande muß die Wellenfunktion den Stetigkeitsbedingungen genügen; d. h. für $r = r_0$ muß gelten:

$$(14) \quad \begin{cases} \psi_i = \psi_e + \psi_r, \\ \dfrac{\partial\psi_i}{\partial r} = \dfrac{\partial\psi_e}{\partial r} + \dfrac{\partial\psi_r}{\partial r}. \end{cases}$$

Die Fläche, über die wir (6) integrieren müssen, ist diejenige, die das Atom umschließt. Wir fanden aber nach (14), daß an der Oberfläche die Funktionen ψ_i und ψ_a gleich sind. Statt ψ_i zu benutzen, dürfen wir jetzt ψ_a in (6) einsetzen.

1) G. N. Watson, Theory of Besselfunctions, S. 128.

Die Koeffizienten B_n und C_n bestimmen sich aus der Stetigkeitsgleichung und daher ist ψ_a jetzt vollständig bestimmt.

Eine Kraft tritt nur dann auf, wenn ein Potentialbereich im Felde vorhanden ist.[1]) Das bedeutet, daß, wenn wir die ψ-Funktion für einen feldfreien Raum in den Kraftausdruck einsetzen, sich der Wert 0 ergeben muß. In der Tat setzen wir $\psi = e^{ikr\cos\vartheta}$ in den Ausdruck (6) für K_z ein und benutzen als Integrationsfläche eine Kugelfläche, dann verschwindet K_z identisch. Unsere Annahme ist also insoweit gerechtfertigt. Wir können also in unserer Integrationsfläche beliebige feldfreie Räume einschließen, ohne den Wert der Kraft zu ändern. Wir dürfen deshalb die Fläche ins Unendliche rücken, solange wir nicht neue Potentialbereiche einfügen. Dies Verfahren[2]) wird unsere Rechnung sehr vereinfachen, denn wir brauchen nur die asymptotischen Werte von ψ_e und ψ_r einzusetzen und werden dann zu einem Wert der Kraft gelangen, der unabhängig von r ist.

Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \quad \frac{1}{\sqrt{kr}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

und ihre Ableitungen verhalten sich asymptotisch wie $1/r$, die Integrationsfläche aber wie r^2. Betrachten wir das erste Glied in dem Integranden für K_z (6), so sehen wir, daß ein Wert unabhängig von r herauskommen wird. Das Auftreten des Faktors $1/r$ im zweiten Glied des Integranden erlaubt uns dann, dieses Glied gegen das erste zu vernachlässigen.

Bezeichnen wir

$$\eta_n(kr) = \frac{1}{\sqrt{kr}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr); \qquad \xi_n(kr) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

und mit Strichen ($'$) die Ableitungen nach den Argumenten, dann lauten die Randbedingungen (14)

$$\text{(14a)} \quad \begin{cases} C_n \chi_n(k_1 r_0) - B_n \eta_n(kr_0) = A_n \xi_n(kr_0) \\ k_1 C_n \chi_n'(k_1 r_0) - k B_n \eta_n'(kr_0) = k A_n \xi_n'(kr_0), \end{cases}$$

wo $A_n = i^n(2n+1)$ ist.

Es folgt dann

$$\text{(15)} \quad B_n = \frac{k\chi_n(k_1 r_0)\xi_n'(kr_0) - k_1 \chi_n'(k_1 r_0)\xi_n(kr_0)}{k\chi_n(k_1 r_0)\eta_n'(kr_0) - k_1 \chi_n'(k_1 r_0)\eta_n(kr_0)} \cdot A_n.$$

1) Durch Bildung der Divergenz an dem Tensor T erhält man leicht unter Benutzung der Schrödingerschen Wellengleichung für die Kraftdichte den Ausdruck: $\psi \cdot \psi^* \cdot \operatorname{grad} V$.

2) Vgl. die ähnlichen Ausführungen bei P. Debye, Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909.

Wir berechnen jetzt nach (6)

$$(16)\quad \left\{ K_z = -\frac{h^2}{16\pi^2 m} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \psi_a}{\partial r} \frac{\partial \psi_a^*}{\partial r} - \psi_a^* \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial r^2} - \psi_a \frac{\partial^2 \psi_a^*}{\partial r^2} \right\} \cos\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi . \right.$$

Es ist

$$2 \frac{\partial \psi_a}{\partial r} \frac{\partial \psi_a^*}{\partial r} = 2 \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial r} + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi_e^*}{\partial r} + \frac{\partial \psi_r^*}{\partial r} \right)$$
$$= 2 \left\{ \frac{\partial \psi_e}{\partial r} \frac{\partial \psi_e^*}{\partial r} + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \frac{\partial \psi_r^*}{\partial r} + \frac{\partial \psi_e^*}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial \psi_e}{\partial r} \frac{\partial \psi_r^*}{\partial r} \right\} .$$

Benutzen wir die Tatsache, daß ψ_e auch gleich $e^{ikr\cos\vartheta}$ ist, so folgt

$$2 \frac{\partial \psi_a}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_a^*}{\partial r} = 2k^2 \left\{ \cos^2\vartheta + \sum_{n\,m} B_n B_m^*\, P_n P_m^*\, \eta_n' \eta_m^{*\prime} \right.$$
$$\left. + \sum_{n\,m} A_n B_m^*\, P_n P_m^*\, \xi_n' \eta_m^{*\prime} + \sum_{n\,m} A_n^* B_m P_n^* P_m\, \xi_n^{*\prime} \eta_m' \right\} ,$$
$$\psi_a^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \psi_a \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial r^2} = 2\,\Re \left[\psi_a^* \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial r^2} \right]$$

und

$$\psi_a^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = (\psi_e^* + \psi_r^*) \left(\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} \right)$$
$$= \psi_e^* \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial r^2} + \psi_r^* \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \psi_e^* \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \psi_r^* \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial r^2}$$
$$= k^2 \left\{ -\cos^2\vartheta + \sum_{n\,m} B_n^* B_m P_n^* P_m \eta_n^* \eta_m'' \right.$$
$$\left. + \sum_{n\,m} A_n^* B_m P_n^* P_m \xi_n^* \eta_m'' + \sum_{n\,m} A_n B_m^* P_n P_m^* \xi_n'' \eta_m^* \right\} .$$

Beim Ausführen der Integrale in (16) ist folgendes zu beachten:

$$\int_0^{\pi} \cos^3\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0 , \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi ,$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\vartheta)\, P_m^*(\cos\vartheta) \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \begin{cases} \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)} & \text{für } m = n-1, \\ \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} & \text{für } m = n+1, \end{cases}$$

Wir erhalten dann aus (16):

$$
(16a)\quad \left\{
\begin{aligned}
K_z = &-\frac{h^2}{16\pi^2 m}\cdot 2\pi r^2\Big[\sum_{n=0}^{\infty} 2k^2\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}\{B_n B^*_{n-1}\eta_n'\eta^{*\prime}_{n-1}\\
&\qquad + A_n B^*_{n-1}\xi_n'\eta^{*\prime}_{n-1} + A^*_n B_{n-1}\xi^{*\prime}_n\eta_{n-1}'\}\\
&+ 2k^2\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\{B_n B^*_{n+1}\eta_n'\eta^{*\prime}_{n+1} + A_n B^*_{n+1}\xi_n'\eta^{*\prime}_{n+1}\\
&\qquad + A^*_n B_{n+1}\xi^{*\prime}_n\eta_{n+1}'\}\\
&- 2\Re k^2\cdot\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}\{B_n B^*_{n-1}\eta_n\eta^{*\prime\prime}_{n-1} + A^*_n B_{n-1}\xi^*_n\eta''_{n-1}\\
&\qquad + A_n B^*_{n-1}\xi''_n\eta^*_{n-1}\}\\
&- 2\Re k^2\cdot\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\{B_n B^*_{n+1}\eta_n\eta^{*\prime\prime}_{n+1} + A^*_n B_{n+1}\xi^*_n\eta''_{n+1}\\
&\qquad + A_n B^*_{n+1}\xi''_n\eta^*_{n+1}\}\Big].
\end{aligned}
\right.
$$

Wir setzen jetzt

$$B_n = A_n\alpha_n,$$

wo nach (15)

$$(17)\qquad \alpha_n = \frac{k\chi_n(k_1 r_0)\xi_n'(k r_0) - k_1\chi_n'(k_1 r_0)\xi_n(k r_0)}{k\chi_n(k_1 r_0)\eta_n'(k r_0) - k_1\chi_n'(k_1 r_0)\eta_n(k r_0)}$$

ist. Auch setzen wir die asymptotischen Werte von η_n, ξ_n und ihren Ableitungen ein. Es ist[1])

$$\eta_n \longrightarrow \frac{1}{kr} i^{n+1} e^{-ikr},\quad \xi_n \longrightarrow \frac{1}{2kr}\left(i^{n+1}e^{-ikr} + (-i)^{n+1}e^{ikr}\right),$$

$$\eta_n' \longrightarrow \frac{1}{kr} i^{n} e^{-ikr},\quad \xi_n' \longrightarrow \frac{1}{2kr}\left(i^{n}e^{-ikr} + (-i)^{n}e^{ikr}\right),$$

$$\eta_n'' \longrightarrow \frac{1}{kr} i^{n-1} e^{-ikr},\quad \xi_n'' \longrightarrow \frac{1}{2kr}\left(i^{n-1}e^{-ikr} + (-i)^{n-1}e^{ikr}\right).$$

Da $A_n = i^n(2n+1)$ ist, so folgt

$$A_n B^*_{n-1} = i(2n+1)(2n-1)\alpha^*_{n-1},$$

$$B_n B^*_{n-1} = i(2n+1)(2n-1)\alpha_n\alpha^*_{n-1}.$$

Wir bekommen schließlich aus (16a)

---

1) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, S. 98.

$$K_z = -\frac{h^2}{16\pi^2 m} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \Big[4n \Big\{ -\alpha_n \alpha_{n-1}^* + 2\Re \frac{1}{2}(-1 + (-i)^{2n-2} \cdot e^{2ikr}) \cdot \alpha_{n-1}^* \Big\} + 4(n+1) \cdot \Big\{ -\alpha_n \alpha_{n+1}^* + 2\Re \frac{1}{2}(-1 + (-i)^{2n+2} e^{2ikr}) \alpha_{n+1}^* \Big\} - 2\Re \Big\{ 2n \Big\{ \alpha_n \alpha_{n-1}^* + 2\Re \frac{1}{2}(1 + i^{2n-2} e^{-2ikr}) \alpha_{n-1} \Big\} \Big\} - 2\Re \Big\{ 2(n+1) \Big\{ \alpha_n \alpha_{n+1}^* + 2\Re \frac{1}{2}(1 + i^{2n+2} e^{-2ikr}) \alpha_{n+1} \Big\} \Big\} \Big].$$

Das ergibt

$$K_z = \frac{h^2}{4\pi m} \sum_{n=0}^{\infty} [n \{ 2\alpha_n \alpha_{n-1}^* + (\alpha_n^* \alpha_{n-1} + \alpha_n \alpha_{n-1}^*) + 2(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^*) \} + (n+1) \{ 2\alpha_n \alpha_{n+1}^* + (\alpha_n^* \alpha_{n+1} + \alpha_n \alpha_{n+1}^*) + 2(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}^*) \}].$$

Da die erste Hälfte des Ausdruckes für $n = 0$ verschwindet, dürfen wir den Index n durch $n + 1$ ersetzen und erhalten:

$$(18) \quad \begin{cases} K_z = \frac{h^2}{2\pi m} \sum^n (n+1) \{ (\alpha_n + \alpha_n^*) + (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}^*) + 2(\alpha_u \alpha_{n+1}^* + \alpha_n^* \alpha_{n+1}) \} \\ \quad = \frac{h^2}{2\pi m} \sum^n \{ (2n+1)(\alpha_n + \alpha_n^*) + 2(n+1) \cdot (\alpha_n^* \alpha_{n+1} + \alpha_n \alpha_{n+1}^*) \} \end{cases}$$

und es folgt dann nach (8)

$$(19) \quad \begin{cases} Q = \frac{2\pi}{k^2} \sum^n \{ (2n+1)(\alpha_n + \alpha_n^*) + 2(n+1)(\alpha_n^* \alpha_{n+1} + \alpha_n \alpha_{n+1}^*) \}. \end{cases}$$

Wir sehen, daß der Wert für die Kraft reell und nur eine Funktion der Koeffizienten α_n ist, die aber von den Parametern k und k_1, welche die Energie enthalten, abhängen, wie wir es auch erwarteten. Weiter können wir zeigen, daß, wenn das Potential im Innern des Atoms gleich Null gesetzt wird, der Ausdruck K_z den Wert 0 liefert. Denn für das Potential 0 wird $\chi_n(k_1 r_0) = \xi_n(k r_0)$ und der Zähler in jedem α_n wird 0. Der Nenner dagegen hat einen endlichen Wert, da er im wesentlichen die Wronskysche Determinante zweier unabhängiger Lösungen derselben Differentialgleichungen gibt.

III. Ein spezielles Atommodell

Wir wollen unsere theoretischen Ergebnisse an einem einfachen Atommodell durchrechnen und sehen, ob die Theorie die experimentellen Tatsachen[1]) wiedergibt. Die Schwierigkeit liegt bei der Bestimmung der Funktion χ_n, die vom Potential im Innern abhängt. Erstens kennen wir das Potential nicht genau und zweitens ist die Differentialgleichung (13) für χ_n für jedes beliebige Potential nicht genau zu lösen.

Wir nehmen an, daß das Potential hervorgerufen werde von einem Z-fach geladenen Kern mit einer Abschirmung der zum Atom gehörigen Elektronen, d. h. es sei

$$V = -\frac{Ze^2}{r} + a.$$

Wir nehmen an, a sei eine Konstante, so daß das Potential für $r = r_0$ verschwindet. Deshalb setzen wir

$$V = -Ze^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{20}$$

Dieses Modell ist schon von Allis und Morse behandelt worden.[2]) Wir führen die Größen ein

$$\begin{cases} \varrho = 2\sqrt{\dfrac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\dfrac{Ze^2}{r_0} - E\right)} \cdot r = k_1 r, \\ \sigma = \dfrac{\dfrac{4\pi^2 m}{h^2} \cdot Ze^2}{\sqrt{\dfrac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\dfrac{Ze^2}{r_0} - E\right)}}. \end{cases} \tag{21}$$

Oder drücken wir r in Einheiten des Bohrschen Radius aus, dann wird

$$\varrho = 2\sqrt{\frac{2Z}{r_0} - k^2} \cdot r \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{Z}{\sqrt{\dfrac{2Z}{r_0} - k^2}}. \tag{21a}$$

Die Differentialgleichung (13) für χ_n wird jetzt

$$\frac{d^2\chi_n}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{d\chi_n}{d\varrho} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sigma}{\varrho} - \frac{n(n+1)}{\varrho^2}\right)\chi_n = 0.$$

Eine Lösung[3]) ist für $k^2 < \dfrac{2Z}{r_0}$

$$\chi_n = e^{-\varrho/2}\varrho^n L^{2n+1}_{\sigma+n}(\varrho), \tag{22}$$

1) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**. S. 513. 1921; **66**. S. 546. 1921; C. Ramsauer u. R. Kollath, Ann. d. Phys. [5] **3**. S. 536. 1929; **4**. S. 91. 1929.

2) W. P. Allis u. P. M. Morse, a. a. O.

3) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien II, Kap. I, § 7.

wo $L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho)$ die Laguerresche Funktion ist.

$$(22\,a)\quad L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho) = 1 + \frac{n+1-\sigma}{1!\,(2n+2)}\varrho + \frac{(n+1-\sigma)(n+2-\sigma)}{2!\,(2n+2)(2n+3)}\varrho^2 + \cdots$$

Wir haben χ_n an der Stelle $r = r_0$ zu berechnen. Wir führen folgende Koordinaten ein:

$$(23)\quad \begin{cases} \text{Es sei } k r_0 = x \\ \text{und} \quad \varrho_0\,\sigma = 2Z r_0 = 2b^2, \quad \text{wo} \quad b^2 = Z r_0 \quad \text{ist.} \end{cases}$$

b^2 ist ein Parameter, der nur vom Atom abhängt. Es folgt nach (21a)

$$\varrho_0 = \sqrt{8b^2 - 4x^2}.$$

Das Argument der Funktionen ξ_n und η_n, das in α_n auftritt, ist dann x. Es wird dann nach (17):

$$(24)\qquad \alpha_n = \frac{x\chi_n(\varrho_0)\,\xi_n'(x) - \varrho_0\chi_n'(\varrho_0)\,\xi_n(x)}{x\chi_n(\varrho_0)\,\eta_n'(x) - \varrho_0\chi_n'(\varrho_0)\,\eta_n(x)}.$$

x^2 ist der Energie proportional; es bleibt jetzt übrig, den Wirkungsquerschnitt als Funktion von x darzustellen. Den Faktor $2\pi/k^2$, der in dem Ausdruck für Q auftritt, ersetzen wir durch $\frac{2\pi r_0^2}{x^2}$.

Für die Berechnung vereinfachen wir α_n folgendermaßen: Wir berechnen aus (22)

$$\frac{\chi_n'(\varrho_0)}{\chi_n(\varrho_0)} = \left[-\frac{1}{2} + \frac{n}{\varrho_0} + \frac{\frac{\partial}{\partial\varrho} L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)}{L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)} \right]$$

und mit Hilfe der bekannten Rekursionsformeln[1]) für die Besselschen und Hankelschen Funktionen erhalten wir aus (24)

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \dfrac{x J_{n+\frac{3}{2}}(x) + \varrho_0 g_n J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(x) + \varrho_0 g_n H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x)} \\ \text{wo} \\ g_n = \left[\dfrac{\frac{\partial}{\partial\varrho} L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)}{L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)} - \dfrac{1}{2} \right] \end{array} \right.$$

ist.

1) G. N. Watson, Theory of Besselfunctions, Kap. III.

Die Besselschen und Hankelschen Funktionen lassen sich leicht aus ihren Darstellungen als trigonometrische Funktionen berechnen.

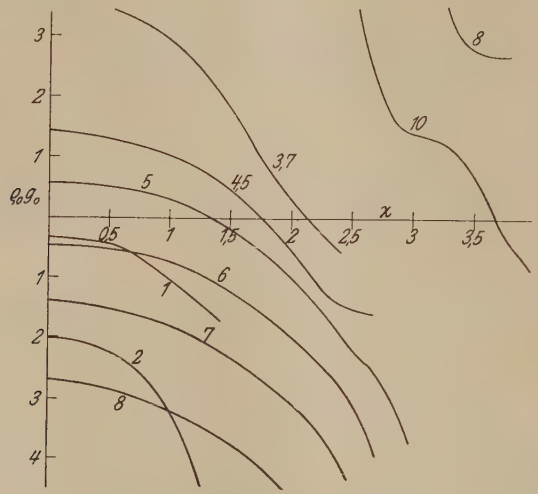

Fig. 1. Die zu den Kurven zugeordneten Zahlen sind die Werte von $b^2 = Z r_0$

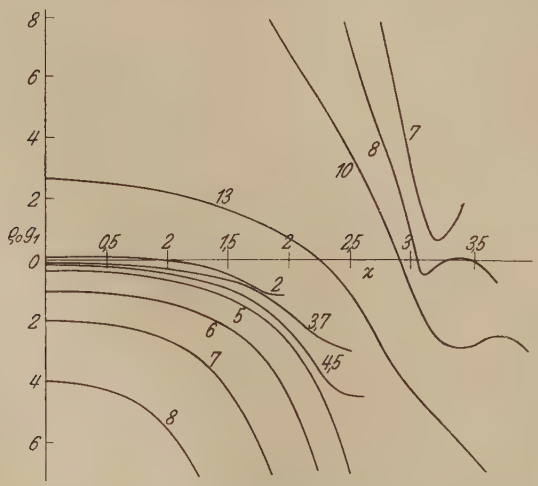

Fig. 2

Eine Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von x, wie es Allis und Morse getan haben, zeigt die Tatsache, daß wir nur die ersten zwei oder drei Glieder der Summe

in Q zu berücksichtigen brauchen, solange x klein ist. Da die Anomalien des Ramsauereffektes nur bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten auftreten, wollen wir die Rechnung nicht

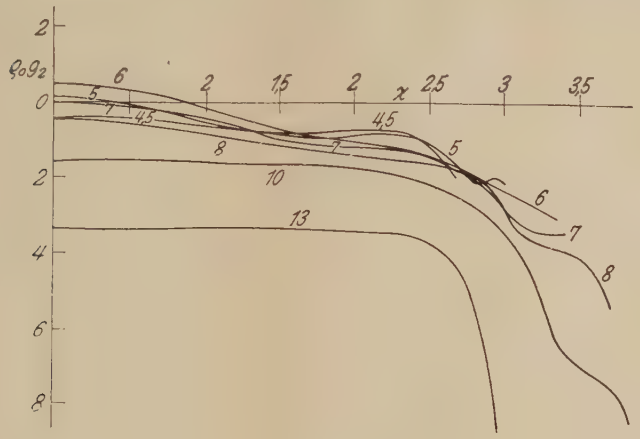

Fig. 3

zu weit führen. Auch bleibt die Laguerresche Funktion nur reell, solange ϱ reell ist, d. h. $x^2 < 2b^2$. Für $x^2 > 2b^2$ wird $L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho)$ eine transzendente Funktion, und die schon mühsame Rechnung wird noch schwieriger. Wir beschränken uns auf das Intervall $x^2 < 2b^2$ für jedes b^2.

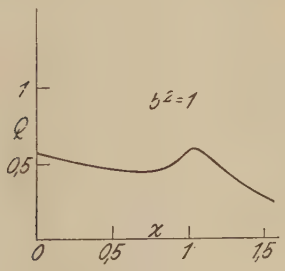

Fig. 4

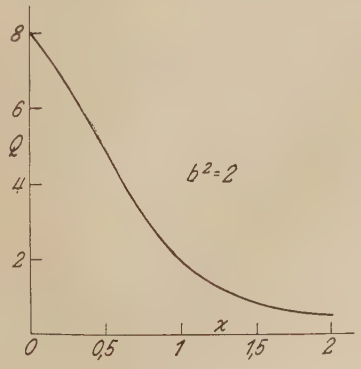

Fig. 5

Die Werte für $\varrho_0 g_n$ sind berechnet worden für verschiedene b^2 und als Funktion von x in Figg. 1, 2, 3 aufge-

tragen. Bei festem b^2 ändern sich ϱ_0 und σ mit x; sobald σ ganzzahlig ist, bricht die Reihe für $L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)$ ab, und der Wert ist an dieser Stelle leicht zu bestimmen. Es wurden zuerst Kurvenscharen von $L_{\sigma+n}^{2n+1}(\varrho_0)$ als Funktion von ϱ_0 und σ gezogen, woraus die Werte für beliebiges x abgelesen werden konnten. Wenn erst die Werte von $\varrho_0 g_n$ bekannt sind, dann folgt die Berechnung von α_n leicht. In Figg. 4—12 sind die berechneten Wirkungsquerschnitte als Funktionen von x dargestellt. (Die Ordinaten sind bis auf den Faktor $2\pi r_0^2$ bestimmt.)

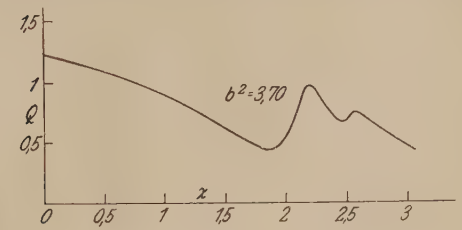

Fig. 6

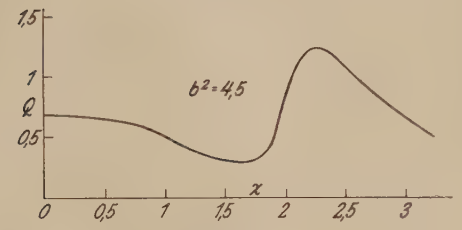

Fig. 7

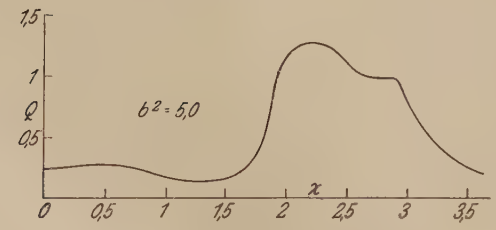

Fig. 8

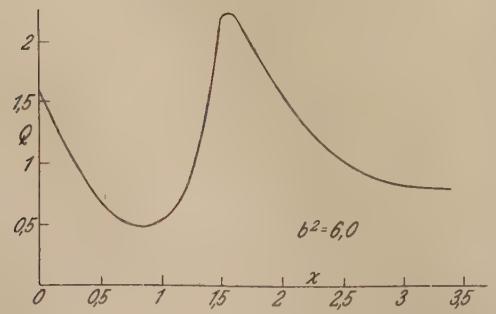

Fig. 9

Die Periodizität der Wirkungsquerschnitte mit b^2 kommt auch hier zum Vorschein, wie sie auch Allis und Morse gefunden haben. Das liegt an der Periodizität der Funktionen $\varrho_0 g_n$ mit b^2, wie man aus Figg. 1 bis 3 ersieht. Fängt man mit $b^2 = 1$ an, so schiebt sich die Kurve mit wachsendem b^2 nach unten bis ins negative Unendliche und fängt

dann wieder im positiven Unendlichen an, um sich wieder nach unten zu schieben. Für $b^2 = 6$ ($n = 1$) verläuft die Kurve schon wieder an derselben Stelle wie für $b^2 = 1$. Die Neigung der Kurven ist im allgemeinen negativ und wächst numerisch mit x.

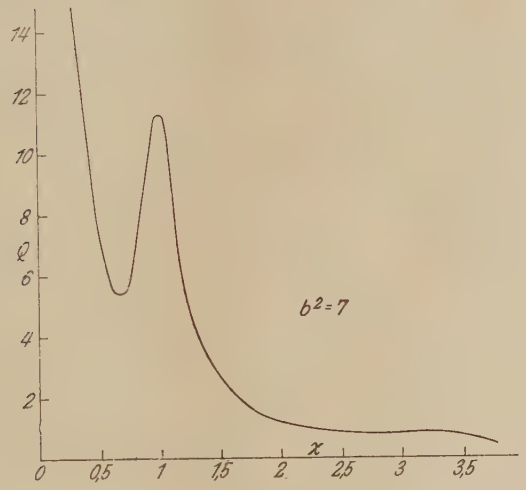

Fig. 10

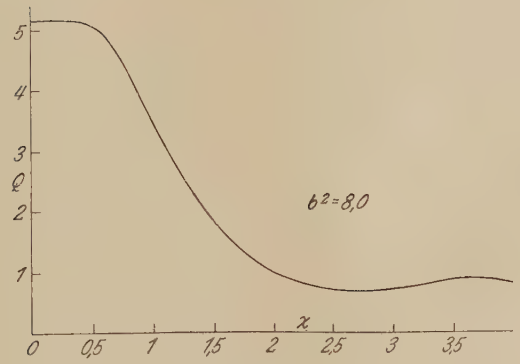

Fig. 11

Für $n = 2$ und $n = 3$ zeigt sich die Periodizität auch, aber mit verlängerter Periode. Eine vollständige Periodizität der Wirkungsquerschnitte kommt deshalb nicht vor.

Die Wirkungsquerschnittkurven zeigen die eigenartig ausgeprägten Maxima, die experimentell auch gefunden worden

sind. Bemerkenswert ist der manchmal hohe Wiederanstieg bei sehr kleinem x. Ein besseres Bild dieser Kurven wird sich ergeben nach den folgenden Betrachtungen in § 4.

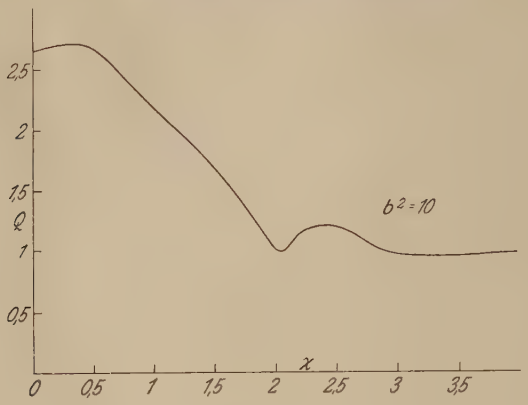

Fig. 12

Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen von Allis und Morse[1]) und den von uns gefundenen zeigt folgendes: Wir fanden für den Wirkungsquerschnitt nach (19)

$$Q = \frac{2\pi r_0^2}{x^2} \sum_n \left\{ (2n+1)(\alpha_n + \alpha_n^*) + 2(n+1)(\alpha_n \alpha_{n+1}^* + \alpha_n^* \alpha_{n+1}) \right\}.$$

Das Ergebnis von Allis und Morse lautet:

$$Q = \frac{4\pi r_0^2}{x^2} \sum_n (2n+1)\, \alpha_n \alpha_n^*.$$

Nur aber sind die α_n komplexe Größen von der Form $\frac{a}{a+ib}$, so daß

$$\alpha_n + \alpha_n^* = 2\, \alpha_n \alpha_n^*$$

ist. Es wird dann

$$Q \text{ (von Allis und Morse)} = \frac{2\pi r_0^2}{x^2} \sum_n (2n+1)(\alpha_n + \alpha_n^*).$$

Wir sehen, daß dieses Resultat die erste Hälfte unseres gefundenen Wertes ist. Die numerische Rechnung zeigte, daß im allgemeinen die Glieder $\alpha_n \alpha_{n+1}^*$ nicht sehr wichtig sind,

1) W. P. Allis und P. M. Morse, a. a. O.

so daß wir ziemlich gute Übereinstimmung der Formen der Kurven erwarten. Wir dürfen ohne weiteres die an bestimmte Atome (durch Wahl von r_0 und b^2) angepaßten Kurven von Allis und Morse auch als Ergebnis unserer Darstellungen betrachten. In Figuren 6a, 9a, 11a, 12a sind etliche Resultate von Allis und Morse angegeben. Die Formen und Größenordnungen stimmen mit unseren Kurven ziemlich gut überein. Abweichungen (wie in Fig. 6a) sind, wie ich glaube, zurückzuführen auf die Annäherungsmethode, die Allis und Morse zur Berechnung der Funktion $\varrho_0 g_n$ benutzt haben.

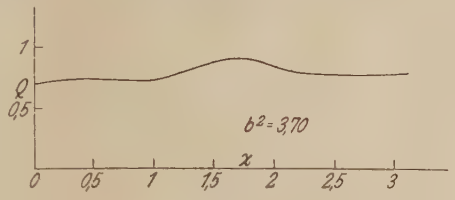

Fig. 6a

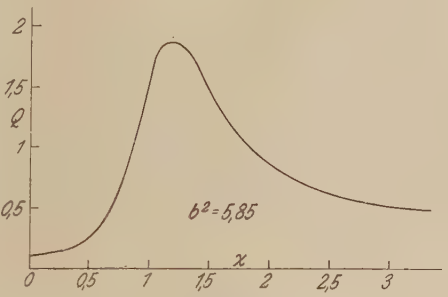

Fig. 9a

IV. Numerische Auswertung

Wir fanden, daß der Wirkungsquerschnitt proportional der Kraft K_z ist. Die Kraft aber hängt im wesentlichen von der Wellenfunktion ψ_i ab. Wenn $\psi_i \psi_i^*$ groß ist, dann erwarten wir einen großen Wert für die Kraft. Das bedeutet, daß wir für solche x-Werte große Wirkungsquerschnitte erwarten, für welche die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Innern des Atoms zu finden, groß ist. Die Gewichte der einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind durch die Koeffizienten A_n, B_n, C_n bestimmt, die ihrerseits durch die Lö-

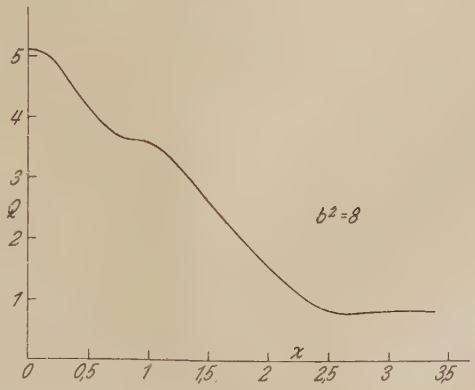

Fig. 11a

sung der Stetigkeitsgleichung bestimmt werden. Wir können niemals mit Sicherheit wissen, daß das Elektron sich im Innern befindet; aber wir dürfen annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit, es im Innern oder als gestreut zu finden, groß sein wird, wenn das Verhältnis B_n/A_n bzw. C_n/A_n sehr groß ist. Wenn es überhaupt solche x-Werte gibt, für welche dieses zutrifft, dann werden wir Maxima der Wirkungsquerschnitte an diesen Stellen zu erwarten haben. Das Verhältnis B_n/A_n bzw. C_n/A_n groß bedeutet aber, daß wir die rechte Seite der Gleichungen (14a) vernachlässigen dürfen. Wir erhalten dann die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten nach (14a)

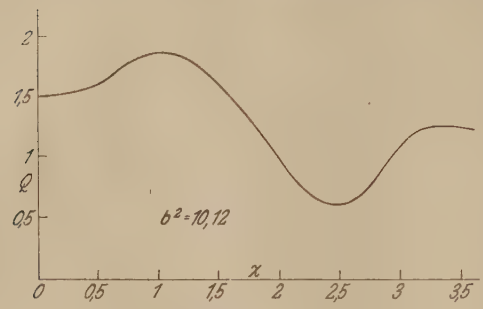

Fig. 12a

$$(26) \quad \begin{cases} C_n \chi_n(\varrho_0) - B_n \eta_n(x) = 0 \\ \varrho_0 C_n \chi_n'(\varrho_0) - x B_n \eta_n'(x) = 0 . \end{cases}$$

Die zwei Gleichungen haben dann und nur dann eine von 0 verschiedene Lösung, wenn die Determinante

$$(27) \quad \begin{vmatrix} \chi_n(\varrho_0), & \eta_n(x) \\ \varrho_0 \chi_n'(\varrho_0), & x \eta_n'(x) \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Die Lösungen dieser Eigenwertgleichung werden dann die Lagen der Maxima bestimmen. Wenn das Elektron eine Energie hat, die eine Lösung dieser Gleichung ist, dann wissen wir, daß es sich im Innern des Atoms mit einer nicht verschwindenden Wahrscheinlichkeit aufhalten kann. Die Lösungen dieser Gleichung bilden also Quantenzustände, die von Beck[1]) als virtuelle Quantenzustände bezeichnet worden sind. Daß an diesen Stellen Maxima hervortreten, folgt ohne weiteres, wenn wir berücksichtigen, daß diese Determinante als Nenner in den α_n auftrat. Wenn die Lösungen rein reell sind, dann werden die Maxima unendlich groß sein. Für komplexe

1) G. Beck, Ztschr. f. Phys. **62**. S. 331. 1930.

Lösungen werden die Maxima noch endlich bleiben. Die Determinantengleichung ergibt

$$x\,\eta_n'(x)\chi_n(\varrho_0) - \varrho_0\chi_n'(\varrho_0)\eta_n(x) = 0,$$

d. h.

$$x\,\eta_n'(x) - \varrho_0\eta_n(x)\cdot\frac{\chi_n'(\varrho_0)}{\chi_n(\varrho_0)} = 0. \tag{27a}$$

Dies können wir wieder, wie früher (25), umformen und erhalten

$$x H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(x) + \varrho_0\, g_n\, H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0,$$

d. h.

$$\frac{x H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(x)}{H_{n+\frac{1}{2}}(x)} = -\varrho_0\, g_n. \tag{27b}$$

Wegen der schwierigen Darstellung der Funktion $\varrho_0 g_n$ ist eine genaue Lösung dieser Gleichung nicht gelungen. Es wird aber genügen, angenäherte Lösungen [1]) zu finden. Für kleine x ist

$$\frac{H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(x)}{H_{n+\frac{1}{2}}(x)} \simeq \frac{2n+1}{x},$$

so daß die Gleichung in

$$\frac{x(2n+1)}{x} = -\varrho_0\, g_n$$

übergeht, d. h.

$$\varrho_0\, g_n = -(2n+1). \tag{28}$$

Die Werte von x, die dieser Gleichung genügen, sind aus den Kurven 1—3 entnommen und in folgender Tabelle zusammengestellt:

b^2	x		
	$n=0$	$n=1$	$n=2$
1	1,0	—	—
2	—	—	—
3,7	—	2,50	—
4,5	2,21	2,13	—
5	2,03	2,05	—
6	1,30	1,73	—
7	—	1,16	—
8	—	—	3,68
10	4,1	3,94	3,24

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **30.** S. 57. 1909.

Die Übereinstimmung dieser Werte mit den Lagen der Maxima ist gut, wenn die grobe Annäherung der Lösung berücksichtigt wird. Betrachten wir eine gewisse Periode, z. B. für $n = 1$ von $b^2 = 3{,}70$ bis $b^2 = 7{,}0$, so finden wir, daß die Eigenwerte mit wachsendem b^2 stets abnehmen. Das heißt, die Maxima wandern von rechts nach links, bis sie zum Nullpunkt kommen. Dann fängt eine neue Periode wieder mit einem ziemlich großen Wert an, der wieder nach links wandert. Wir sehen auch hier, daß die Periode sich mit wachsendem n verlängert. Das liegt an der schon erwähnten Periodizität der $\varrho_0 g_n$-Kurven.

Die Lösung der Gl. (28) wird eine genaue Lösung sein, wenn gerade die Lösung an der Stelle $x = 0$ ist. Die Lösung ist dann rein reell und wir dürfen in solchem Falle einen unendlichen Wert an der Stelle $x = 0$ erwarten. In der Umgebung der Stelle $x = 0$ ist der Wirkungsquerschnitt nach (19) gegeben durch

$$Q = \frac{2\pi r_0^2}{x^2}(\alpha_0 + \alpha_0^*) = \frac{4\pi r_0^2}{x^2}\,\Re(\alpha_0).$$

Es ist nach (25):

$$\alpha_0 = \frac{x J_{3/2}(x) + \varrho_0 g_0 J_{1/2}(x)}{x H^{(2)}_{3/2}(x) + \varrho_0 g_0 H^{(2)}_{1/2}(x)}.$$

Setzen wir die Werte für $J_{3/2}$, $J_{1/2}$, $H^{(2)}_{3/2}$, $H^{(2)}_{1/2}$ ein, und machen wir den Grenzübergang für $x \to 0$, so ergibt sich für Q an der Stelle $x = 0$ der Wert

$$\left.\frac{4\pi r_0^2 (\varrho_0 g_0)^2}{(1 + \varrho_0 g_0)^2}\right|_{x=0}.$$

Diese Formel kann man allgemein benutzen, um den Wert für irgendein b^2 an der Stelle $x = 0$ zu berechnen. Ist gerade für ein gewisses b^2, $\varrho_0 g_0 = -1$ an der Stelle $x = 0$, so wird Q unendlich groß, was wir schon aus der Lösung der Eigenwertgleichung gefolgert hatten. Wir sehen auch, daß wenn $\varrho_0 g_0$ nur wenig von -1 verschieden ist, wir einen sehr großen Wert bekommen werden. Wir können sagen, daß der Eigenzustand für $x = 0$ sehr leicht angeregt werden kann. Aus den Q-Kurven bemerken wir auch, daß der Wert des Maximums mit abnehmendem x zunimmt. Der Wert des Maximums hängt aber auch von der Ordnung (d. h. von n) des Eigenwertes ab.

Betrachten wir wieder die Gl. (27 b):

$$\frac{H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}}{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{\varrho_0 g_n}{x}.$$

Gäbe es eine Wurzel, in der nächsten Umgebung von $x = 0$, und hätte b^2 solch einen Wert, daß $\varrho_0 g_n$ dort von 0 verschieden ist, dann wird die rechte Seite sehr groß. Es muß dann $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x) \simeq 0$ sein. Nur die kleinste Wurzel von $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}} = 0$ kann in Betracht kommen und diese Wurzel muß sehr nahe an $x = 0$ liegen. Die kleinste Wurzel ist die von $H^{(2)}_{3/2} = 0$, d. h. $x = i$. Diese Wurzel wird um so besser gelten, je größer der Wert von $\varrho_0 g_1$ in der Umgebung von $x = 0$ ist. Der reelle Teil der Lösung ist 0, so daß dies Maximum in der Nähe des Nullpunktes liegt. Aber der Wert des Maximums bleibt endlich. Dies Maximum ist deshalb nicht mit den früheren (unendlichen) an der Stelle $x = 0$ gefundenen zu verwechseln. Sehen wir uns die Kurven für $\varrho_0 g_1$ an, so erwarten wir dieses endliche Maximum für $b^2 = 10$. Auch $b^2 = 8$ käme in Betracht. Aber der Wert für $\varrho_0 g_1$ liegt schon nahe -3, so daß das Maximum zum Teil durch Anregung des unendlichen Maximums hervorgetreten sein könnte.

Der Bruch $\frac{H^{(2)}_{n+\frac{3}{2}}(x)}{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x)}$ läßt sich für ein beliebiges x nicht durch einen reellen Ausdruck wie $\frac{2n+1}{x}$ darstellen. Im allgemeinen wird er komplex sein, und wir haben komplexe Wurzeln in unserer Gleichung zu erwarten.

Es sei x_0 eine der schon gefundenen angenäherten Lösungen von (27 b). An der Stelle $x = x_0$ sei eine zweite Annäherung

$$\frac{H_{n+\frac{3}{2}}(x_0)}{H_{n+\frac{1}{2}}(x_0)} = \frac{2n+1}{x_0} + \lambda,$$

wo λ eine kleine imaginäre Größe ist. So eine Darstellung läßt sich im allgemeinen finden. Es sei $x_0 + \Delta x_0$ eine zweite Annäherung der Wurzel, dann ist:

$$\Delta x_0 = - \frac{\lambda x_0}{\frac{d}{dx}\left[\frac{x H_{n+\frac{3}{2}}}{H_{n+\frac{1}{2}}} + \varrho_0 g_n\right]_{x = x_0}} .$$

Bezeichnen wir $\frac{d}{dx}(\varrho_0 g_n)$ mit $\varkappa$, führen wir die Differentiation von $\frac{x H_{n+\frac{3}{2}}}{H_{n+\frac{1}{2}}}$ aus und formen wir die Ausdrücke mit Hilfe der Rekursionsformel um, so daß wir immer den Bruch $\frac{H_{n+\frac{3}{2}}}{H_{n+\frac{1}{2}}}$ erhalten, und setzen wir dafür den Wert $\frac{2n+1}{x_0} + \lambda$ ein, so erhalten wir schließlich:

$$\Delta x_0 = \frac{\lambda x_0}{(2n+1)\lambda + x_0(1+\lambda^2) + \varkappa} .$$

Es sei λ klein, so daß $|\lambda|^2 \ll 1$ ist. Dann wird

$$\Delta x_0 = - \frac{\lambda x_0}{(2n+1)\lambda + (x_0 + \varkappa)} = - \frac{\lambda x_0 \{(2n+1)\lambda^* + (x_0 + \varkappa)\}}{(2n+1)^2 \lambda\lambda^* + (x_0 + \varkappa)^2}$$
$$= - \frac{\lambda\lambda^*(2n+1)x_0}{(x_0+\varkappa)^2} - \frac{\lambda x_0 (x_0 + \varkappa)}{(x_0+\varkappa)^2} ,$$

wenn wir $\lambda\lambda^*$ vernachlässigen.

Das erste Glied ist rein reell und von der Ordnung $\lambda\lambda^*$, d. h. es ist zu vernachlässigen. Das zweite Glied ist aber rein imaginär und gleich $- \frac{\lambda x_0}{x_0 + \varkappa}$. Aus den $\varrho_0 g_n$-Kurven sehen wir, das $\varkappa$ im allgemeinen negativ ist und mit x_0 wächst. Es wird daher $x_0 + \varkappa$ nicht so rasch wachsen wie x_0. Der Bruch wird daher mit x_0 wachsen, d. h. der komplexe Teil der Lösung wird mit wachsendem reellen Teil auch wachsen.

Die zeitabhängige Wellenfunktion ist

$$\psi = \varphi(x\,y\,z)\, e^{\frac{2\pi i E t}{h}} .$$

Wenn nun E komplex ist, d. h. $E = E_0 + i\gamma$, dann wird

$$\psi = \varphi \cdot e^{\frac{2\pi i E_0}{h} t} \cdot e^{-\frac{2\pi}{h}\gamma t}$$

und $\psi\psi^* = \varphi\varphi^* e^{-\omega t}$, wo ω proportional γ ist.

Das heißt, wir haben eine Wahrscheinlichkeit, die mit der Zeit abnimmt. Der Zustand hat dann eine endliche Lebensdauer $\tau = \frac{1}{\omega}$.

Wir haben gefunden, daß unsere Quantenzustände mit Ausnahme derer, die zu $x = 0$ gehören, alle komplexe Eigenwerte haben. Es folgt daher, daß diese Zustände nur Zustände mit endlicher Lebensdauer sind und je mehr der Eigenwert von Null verschieden ist, desto kürzer ist die Lebensdauer. Die Zustände sind in der Tat gedämpft. Wir können jetzt verstehen, warum die Maxima mit wachsenden Eigenwerten immer abnehmen und deshalb, warum der Ramsauereffekt nur bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten eintrat. Es ist klar, daß je länger das Elektron sich im Innern aufhalten kann, der Wirkungsquerschnitt desto größer sein wird.

Unser Ergebnis ist daher folgendes: Es gibt diskrete Quantenzustände mit positiven Energiewerten, die von der Atomkonstante b^2 abhängen; aber diese Zustände haben alle eine endliche Lebensdauer, die allgemein mit wachsendem Energiewert abnimmt. Weiter sind diese Quantenzustände maßgebend für die beobachteten Anomalien in der Streuung langsamer Elektronen.

V. Der Wirkungsquerschnitt für große Geschwindigkeiten

Wir wollen jetzt mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen[1]) der Besselschen und Laguerreschen Funktionen den Ausdruck (19) für den Wirkungsquerschnitt

$$Q = \frac{2\pi r_0^2}{x^2} \sum^n (2n+1)\,(\alpha_n + \alpha_n^*) + 2(n+1)\,(\alpha_n \alpha_{n+1}^* + \alpha_n^* \alpha_{n+1})$$

für große x (d. h. für große Geschwindigkeiten) in erster Näherung berechnen.

Man definiere den spitzen Winkel $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ durch die Gleichung $\cos\tau = \dfrac{n+\frac{1}{2}}{x}$ für $n + \frac{1}{2} < x$ und die Funktion $f = \sin\tau - \tau\cos\tau$.

Dann haben wir die bekannten asymptotischen Darstellungen für ξ_n und η_n folgendermaßen:

$$\xi_n = \frac{1}{x}\,\frac{\cos\left(xf - \frac{\pi}{4}\right)}{(\sin\tau)^{1/2}}; \qquad \eta_n = \frac{1}{x}\,\frac{e^{-t\left(xf - \frac{\pi}{4}\right)}}{(\sin\tau)^{1/2}}.$$

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, S. 102.

Die Differentialgleichung (13) für die Funktion χ_n lautet in Wasserstoffeinheiten nach (20):

$$\frac{d^2\chi_n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\chi_n}{dr} + \left(E + \frac{2Z}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\chi_n = 0,$$

wenn wir Z/r_0 gegen E vernachlässigen.

Setzen wir $x = \sqrt{E}\cdot r$, so wird sie mit $\sigma = \frac{Z}{\sqrt{E}}$

$$\frac{d^2\chi_n}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\chi_n}{dx} + \left(1 + \frac{2\sigma}{x} - \frac{n(n+1)}{x^2}\right)\chi_n = 0. \tag{29}$$

Als Lösung setzen wir an:

$$\chi_n = a\,\frac{e^{\pm i\left(xf - \frac{\pi}{4}\right)}}{(\sin\tau)^{1/2}},$$

wo „a“ eine langsame Veränderliche ist. Durch Einsetzen erhält man für „a“ die Gleichung:

$$\frac{da}{dx} + \frac{\sin\tau \pm i\sigma}{x}\cdot a = 0.$$

Es folgt:

$$a = \frac{1}{x}\,e^{\pm i\sigma\log\frac{x + \sqrt{x^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{n+\frac{1}{2}}}$$

und schließlich für χ_n durch Kombination beider Lösungen:

$$\chi_n = \frac{1}{x}\,\frac{\cos\left(xf - \frac{\pi}{4} + \sigma\delta\right)}{(\sin\tau)^{1/2}} \quad \text{mit} \quad \delta = \log\frac{x + \sqrt{x^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{n+\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Wir beschränken uns zunächst auf den obigen Fall[1]) $n + \frac{1}{2} < x$ und berechnen die Koeffizienten α_n. Ersetzt man die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, so erhält man schließlich aus (17):

$$2\alpha_n = -\frac{(2\sin\tau + \sigma\delta')\,e^{-2i\sigma\delta} + \sigma\delta' i\,e^{2ixf}}{2\sin\tau + \sigma\delta' - \sigma\delta' i\,e^{-2i(xf+\sigma\delta)}} + 1,$$

wo $\delta' = \frac{d\delta}{dx}$ ist.

1) Man kann leicht zeigen, daß die Glieder $n + \frac{1}{2} > x$ keinen Beitrag in erster Näherung liefern. Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909.

Wir setzen $\frac{\sigma\,\delta'}{2\sin\tau + \sigma\,\delta'} = r$ und beachten, daß $|r| < 1$ ist. Damit wird:

$$(31)\quad \begin{cases} 2\,\alpha_n = 1 - \dfrac{e^{-2i\sigma\delta} + r\,i\,e^{2ixf}}{1 - r\,i\,e^{-2i(xf+\sigma\delta)}} = 1 - (ir)\,e^{2ixf} \\ \qquad - (1-r^2)\,e^{-2i\sigma\delta} - (1-r^2)\,e^{-2i\sigma\delta}\sum_{p=1}^{\infty}(ir)^p\,e^{-2ip(xf+\sigma\delta)}. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst alle Glieder, die e^{-ixf} als Faktor haben. Wir werden später den reellen Teil von α_n für alle n summieren müssen. Dabei wächst f von 0 bis 1, wenn n von 0 bis x läuft. Da x sehr groß ist, schwankt der reelle Teil von e^{-ixf} sehr oft zwischen $+1$ und -1, so daß im Limes die Summation über alle solche Glieder den Wert 0 ergibt. In erster Näherung dürfen wir deshalb alle diese Glieder zu einem Rest R zusammenfassen, der bei der Summation vernachlässigt werden darf.

Setzen wir $f_1 = \sin\tau_1 - \tau_1\cos\tau_1$ und $\cos\tau_1 = \dfrac{n+\frac{3}{2}}{x}$, so folgt aus (31)

$$2\,\alpha^*_{n+1} = 1 + (ir)\,e^{-2ixf_1} - (1-r^2)\,e^{2i\sigma\delta} - (1-r^2)\,e^{2i\sigma\delta}\sum_{p=1}^{\infty}(-ir)^p\,e^{2ip(xf_1+\sigma\delta)},$$

wenn wir $\delta_{n+1} = \delta_n$ setzen, was gerechtfertigt ist, da δ eine langsame Veränderliche ist. Es folgt dann

$$(32)\quad \begin{cases} 4\,\alpha_n\,\alpha^*_{n+1} = 1 + r^2\,e^{-2ix(f_1-f)} + (1-r^2)^2 - (1-r^2)\,2\cos 2\sigma\delta \\ \qquad + (1-r^2)^2\sum_{p=1}^{\infty} r^{2p}\,e^{2ip(xf_1-xf)} + \text{Rest}. \end{cases}$$

Es ist

$$\cos\tau_1 = \cos\tau - \Delta\tau\,\sin\tau,$$

$$\cos\tau_1 - \cos\tau = -\Delta\tau\,\sin\tau = \frac{n+\frac{3}{2}}{x} - \frac{n+\frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{x}$$

und

$$f_1 - f = \Delta\tau\cdot\tau\,\sin\tau = -\frac{\tau}{x}.$$

Setzen wir das ein, so folgt aus (32)

$$(32\text{a})\quad \begin{cases} 4\,\alpha_n\,\alpha^*_{n+1} = 1 + r^2\,e^{2i\tau} - (1-r^2)\,2\cos 2\sigma\,\delta \\ \qquad + (1-r^2)^2\cdot\dfrac{1}{1-r^2\,e^{-2i\tau}} + R \end{cases}$$

und schließlich aus (31) und (32a)

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{2. Reeller Teil } \{\alpha_n + \alpha_n\,\alpha^*_{n+1}\} \\ \qquad = \left[\dfrac{3}{2} - 2\,(1-r^2)\cos 2\sigma\delta + \dfrac{r^2}{2}\cos 2\tau \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{(1-r^2)^2}{2}\cdot\dfrac{1-r^2\cos 2\tau}{1-2r^2\cos 2\tau + r^4}\right]. \end{array}\right.$$

Wenn wir jetzt $(2n+1) = 2(n+1)$ setzen, so folgt aus (19)

$$Q = \frac{2\pi r_0^2}{x^2}\sum_{n=0}^{<x}(2n+1)\cdot 2\Re(\alpha_n + \alpha_n\,\alpha^*_{+\ 1}).$$

Mit Hilfe von $2n+1 = 2x\cos\tau$ und $-\dfrac{1}{x}\sin\tau\,d\tau$ ersetzen wir die Summation durch eine Integration über τ mit Grenzen 0 und $\pi/2$, d. h.

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} Q = 2\pi r_0^2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[\frac{3}{2} - 2\,(1-r^2)\cos 2\sigma\delta + \frac{r^2}{2}\cos 2\tau \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1-r^2}{2}\cdot\dfrac{1-r^2\cos 2\tau}{1-2r^2\cos 2\tau + r^4}\right] 2\cos\tau\sin\tau\,d\tau\,, \end{array}\right.$$

wo $r = \dfrac{\alpha}{2\sin^2\tau + \alpha}$ ist, mit $\alpha = \dfrac{\sigma}{x}$.

Da $\sigma = \dfrac{Z}{\sqrt{E}}$ ist, ist α sehr klein bei großen Geschwindigkeiten. Wir werden deshalb die Integrale nach steigenden Potenzen von α auswerten und uns mit den ersten Gliedern begnügen.

Das Integral

$$4\int_0^{\pi/2}\cos 2\sigma\delta\,\sin\tau\cos\tau\,d\tau = 2\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n\sigma^2}{\sigma^2+n^2}\right],$$

$$4\int_0^{\pi/2} r^2\cos 2\sigma\delta\,\sin\tau\cos\tau\,d\tau$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{1}{\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}\right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+n^2} + \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(n+1)^2}\right\}\frac{\cos(2n+1)\,\vartheta}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}}\right],$$

wo $\dfrac{2}{\alpha} = \operatorname{tg}\vartheta$ gesetzt ist.

Die letzten zwei Integrale in (34) zusammen ergeben

$$\frac{1}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{r^2(1-\cos 2\tau)\,(1-r^2\cos 2\tau)}{1-2r^2\cos 2\tau + r^4}\, 2\sin\tau\cos\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\log\frac{1+\alpha}{\alpha} + \text{Glieder höherer Ordnung}.$$

Fassen wir das jetzt zusammen und behalten wir nur Glieder von der Ordnung α, so ergibt sich aus (34)

$$Q = 2\pi r_0^2[\alpha + 8\sigma^2\log 2]$$
$$= 2\pi r_0^2\left[\frac{Z}{E r_0} + \frac{8Z^2}{E}\log 2\right]$$

und mit der früheren Bezeichnung (23) $b^2 = Z r_0$ haben wir

$$Q = 2\pi\left[\frac{b^2}{E} + \frac{8b^4}{E}\log 2\right]. \tag{35}$$

Wir sehen, daß der Wirkungsquerschnitt jetzt nicht mehr von r_0 abhängt, sondern nur von b^2, ein Resultat, was zu erwarten war. Denn bei großen Geschwindigkeiten wird das Potential in der Umgebung von r_0 die Streuung nicht merklich beeinflussen, nur die gesamte Größe des Atoms, die durch b^2 gegeben ist, bestimmt die Streuung. Der Parameter b^2 zeigt sich nicht nur als das Produkt $Z r_0$, sondern als eine eigentliche Eigenschaft eines Atoms. Allis und Morse deuten $b^2/2$ als die Fläche, die die Kurve $r \cdot V$ einschließt, wenn wir $r \cdot V$ als Funktion von r aufschreiben. Wir finden hier gewissermaßen eine Rechtfertigung für ihr Verfahren, wenn sie b^2 so bestimmen, daß die Fläche der theoretischen Kurve des Potentials gleich wird der Fläche der gebrochenen Kurve von Slater.[1])

Der Zusammenhang zwischen der Form der Streukurve (Lagen der Maxima) und der Ionisierungsspannung des Atoms läßt sich hier mit experimentell gefundenen Tatsachen deuten. Brode[2]) hat gefunden, daß bei einer Geschwindigkeit außerhalb des Bereiches der Maxima der Wirkungsquerschnitt verschiedener Atome ungefähr proportional der Ionisierungsspannung ist. Nun ist die Ionisierungsspannung gewiß ein Maß für die Größe des Atoms, wie der Parameter b^2. Die

1) B. P. Allis u. P. M. Morse, a. a. O.
2) R. B. Brode, Phys. Rev. **37**. S. 570. 1931.

von Brode gefundene Tatsache stimmt dann überein mit dem obigen gefundenen Wert für den Wirkungsquerschnitt bei großen Geschwindigkeiten. Da, wie wir bereits gesehen haben, der Wert von b^2 die Form der Streukurven bestimmt, so finden wir hier eine Deutung für den Zusammenhang zwischen Lage der Maxima und Ionisierungsspannung.

Hrn. Dr. F. Möglich möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für das fördernde Interesse bei ihrer Ausführung herzlich danken.

Der Universität Kapstadt möchte ich auch an dieser Stelle für die Gewährung eines „Queen Victoria Memorial"-Stipendiums meinen Dank aussprechen.

Lebenslauf

Ich, Reuben Louis Rosenberg, bin im Jahre 1909 in Johannesburg, Südafrika, geboren. Bis zum Dezember 1925 besuchte ich die Südafrikanische Volksschule. Von März 1926 bis Dezember 1929 studierte ich an der Universität Kapstadt und erwarb zum Schluß den M. A.-Grad. Seit dem Wintersemester 1930 setzte ich mein Studium an der Universität Berlin fort.

Allen meinen akademischen Lehrern bin ich zu großem Dank verpflichtet, besonders Herrn Dr. F. Möglich für seine Anregung zu dieser Arbeit und sein förderndes Interesse während der Ausführung.

Auch der Universität Kapstadt möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen für die Gewährung eines Queen Victoria Memorial-Stipendium, das mein Studium in Berlin ermöglichte.